超 静 定 结 构

静定结构的内力只根据静力平衡条件既可求出，而不必考虑变形协调条件，即内力是静定的。

超静定结构的内力的求解则必须同时考虑静力平衡条件和变形协调条件，即内力是超静定的。

计算超静定结构的基本方法：

- 力法
- 位移法

第 7 章 力 法
FORCE ANALYSIS

力法是求解超静定结构的基本方法之一，也是学习其他方法的基础。

力法以静定结构为基础，将多余约束力作为基本未知量，根据变形协调条件建立力法方程并求解。

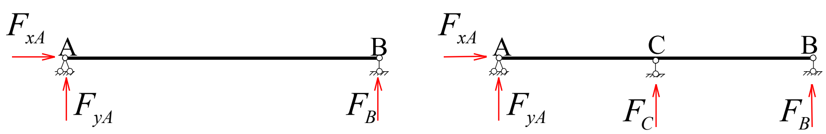
本章目录

- 超静定结构的组成和超静定次数
- 力法的基本概念
- 超静定刚架和排架
- 超静定桁架和组合结构
- 对称结构的计算
- 支座位移和温度改变时超静定结构的计算
- 超静定结构的位移计算

§ 7-1 超静定结构的组成和超静定次数

一. 超静定结构的组成
The Components of Statically Indeterminate Structure

- 静定结构 —— 结构的支座反力和各截面的内力都可以用静力平衡条件唯一地确定。
- 超静定结构 —— 支座反力和各截面的内力不能完全由静力平衡条件唯一地确定。



静定结构是无多余约束的几何不变体系。
超静定结构是有多余约束的几何不变体系。

二. 超静定结构的基本特征

几何组成特征：几何不变、有多余约束。

静力特征：仅有静力平衡条件无法全部确定支座反力和内力。

求解条件：超静定结构的解必须同时满足静力平衡条件和变形协调条件。

三. 超静定结构的形式

- 超静定梁
- 超静定刚架
- 超静定桁架
- 超静定排架
- 超静定拱
- 超静定组合结构

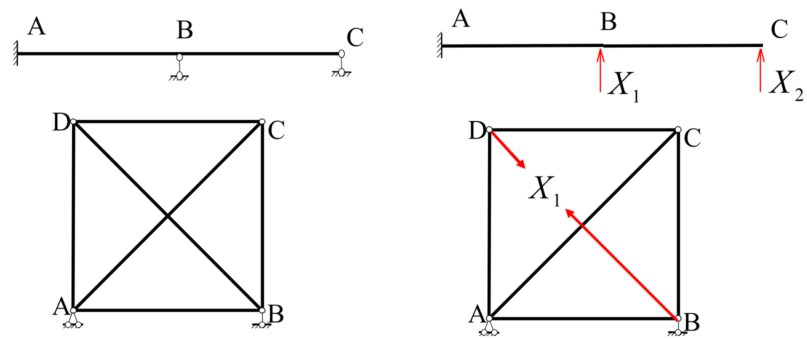
四. 超静定次数的确定

超静定次数是指超静定结构中多余约束的个数。

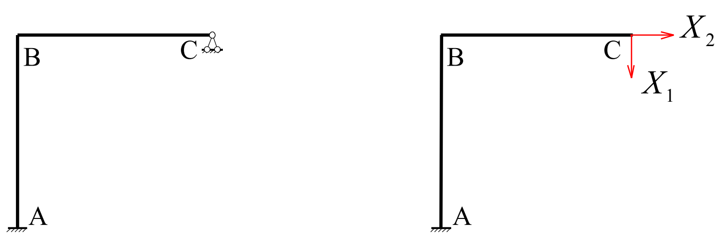
即如果去掉n个约束后，超静定结构就变成了静定结构，那么，超静定次数就等于n。

确定超静定次数的方式通常有如下几种：

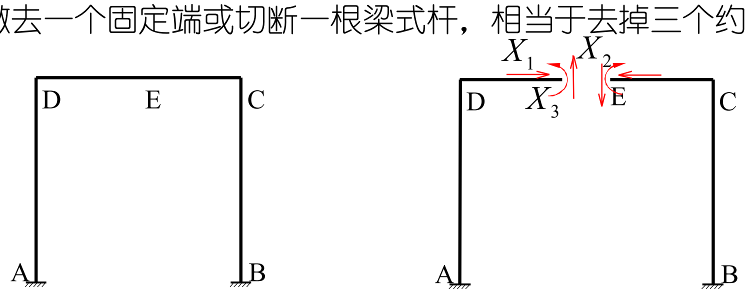
- 去掉一根支杆或切断一根链杆，相当于去掉一个约束。



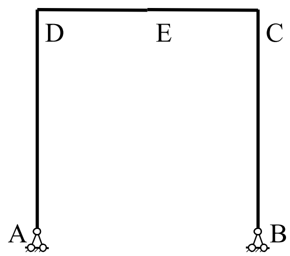
- 撤去一个固定铰支座或撤去一个单铰，相当于去掉两个约束

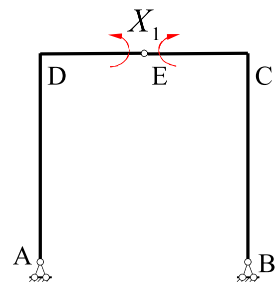


- 撤去一个固定端或切断一根梁式杆，相当于去掉三个约束。



❑ 在连续杆上加入一个单铰（即将刚结的两根杆改为铰接），相当于去掉一个约束。



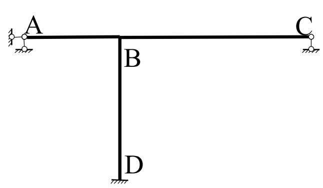


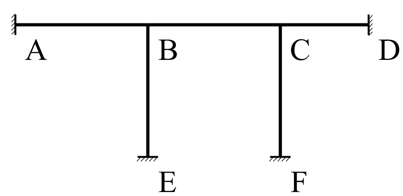
注意：

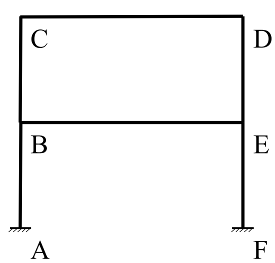
❖ 要把全部的多余约束都拆掉。

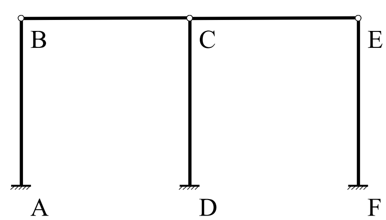
❖ 不要把原结构拆成一个可变体系，即不能去掉必要约束。

确定下列结构的超静定次数









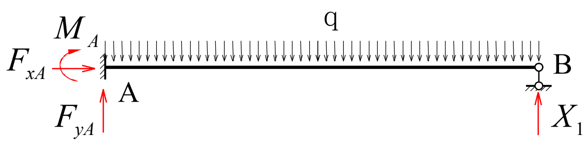
§7-2 力法的基本概念

一. 基本思路

解除多余约束，代之于多余约束力，化超静定结构为静定结构的计算。

❑ 力法的基本未知量

超静定问题的关键问题是计算多余约束力。

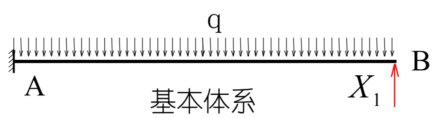


在力法中，只要X_1能解出，其余未知力就可以用静力法求出。

力法的基本未知量：多余约束力 X_1

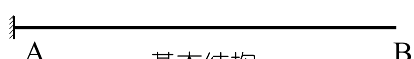
❑ 力法的基本体系

把多余约束去掉，而代之以多余约束力X_1，这样得到的含有多余约束力的静定结构称为力法的基本体系。



基本体系

把原超静定结构中多余约束和荷载都去掉后得到的静定结构为力法的基本结构。



基本结构

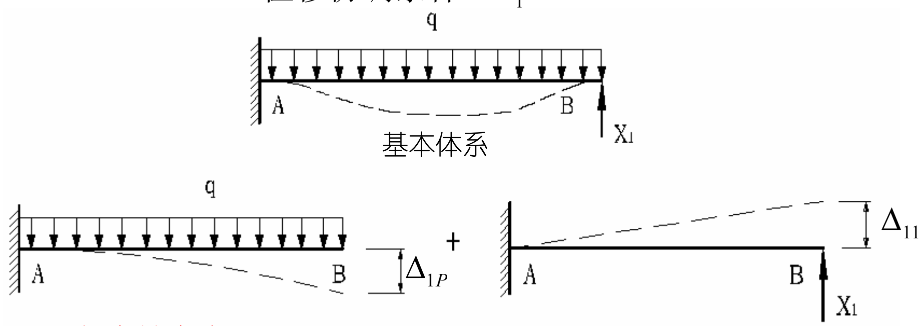
拆除多余约束后的静定结构 → 基本结构

拆除多余约束添加约束反力 → 基本体系

❑ 力法的基本方程(典型方程)

基本体系转化为原来的超静定结构的条件是：基本体系沿多余约束力X1的方向的位移△1应与原结构相同，即

位移协调条件：$\Delta_1 = 0$



力法基本方程：$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0$

$\triangle_{1P}$是基本结构在荷载单独作用下沿X_1方向的位移。

$\triangle_{11}$是基本结构在多余约束力X_1单独作用下沿X1方向的位移。

设δ_{11}在数值等于基本结构在单位力单独作用下沿X_1方向产生的位移。则

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1$$

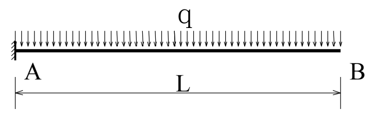
故在线性变形条件下一次超静定结构的力法基本方程为：

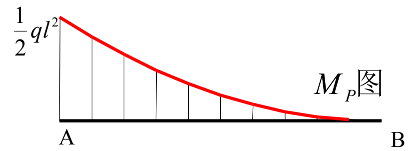
$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

力法方程中的系数项δ_{11}和自由项Δ_{1P}都是基本结构即静定结构的位移，则可以使用静定结构位移计算公式进行计算。

$$\Delta_{1P}=\int\frac{M_P\overline{M}_1}{EI}dx$$

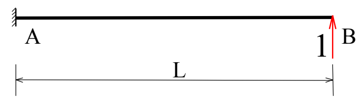
$$=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{4}\times\frac{ql^2}{2}\times l\times l\right)=-\frac{ql^4}{8EI}$$

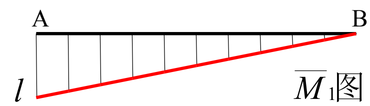




$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_1}{EI}dx$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\times l\times l\times l\right)=\frac{l^3}{3EI}$$



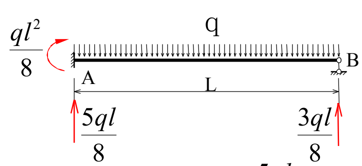


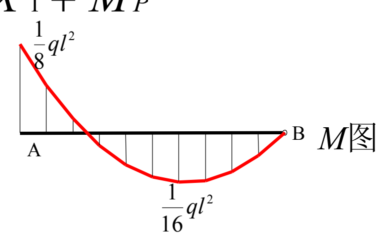
将$\triangle_{1P}$和δ_{11}代入力法基本方程，可得

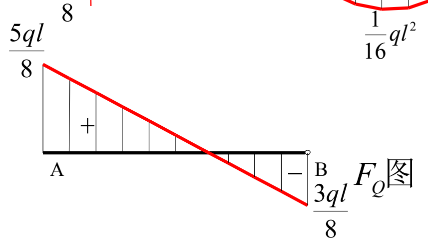
$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=\frac{l^3}{3EI}X_1-\frac{ql^4}{8EI}=0 \quad\Longrightarrow\quad X_1=\frac{3}{8}ql$$

根据叠加原理，结构任一截面的弯矩M为：

$$M=\overline{M}_1X_1+M_P$$







二. 力法典型方程

对于n次超静定的一般情形，力法的基本未知量使n个多余约束的未知力X_1、X_2、…X_n 。求解步骤如下：

(1) 选择基本结构

去掉原结构的多余约束得到任意一个静定结构为基本结构。确定n个基本未知力X_1、X_2、…X_n。

(2) 建立力法典型方程

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1p}=0 \\ &\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2P}=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nP}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4)$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{21} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

系数项 δ_{ij} 是由单位力 $X_j=1$ 产生的沿 X_i 方向的位移。

自由项 Δ_{iP} 是由真实荷载产生的沿 X_i 方向的位移。

注意：

- 根据位移互等定理有 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$
- 主系数 $\delta_{ii}>0$，副系数 $\delta_{ij}(i\neq j)$可正、可负、也可为零。

（3）求解系数项和自由项

$$\delta_{ij}=\sum\int\frac{\overline{M}_i\overline{M}_j}{EI}ds \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

（$\overline{M}_i$ 图与 $\overline{M}_j$ 图进行图乘）

$$\Delta_{iP}=\sum\int\frac{\overline{M}_iM_P}{EI}ds \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

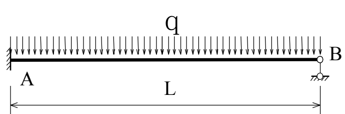
（$\overline{M}_i$图与 M_P图进行图乘）

（4）解方程，求多余未知力X_1、X_2 … X_n

（5）根据叠加原理，求解超静定结构的内力，绘制内力图

$$\left.\begin{aligned}
M &= \overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+\cdots+\overline{M}_nX_n+M_P\\
F_Q &= \overline{F}_{Q1}X_1+\overline{F}_{Q2}X_2+\cdots+\overline{F}_{Qn}X_n+F_{QP}\\
F_N &= \overline{F}_{N1}X_1+\overline{F}_{N2}X_2+\cdots+\overline{F}_{Nn}X_n+F_{NP}
\end{aligned}\right\}$$

【例7.1】作图示结构的弯矩图。EI为常数



解：（1）选择基本结构

（2）建立力法典型方程

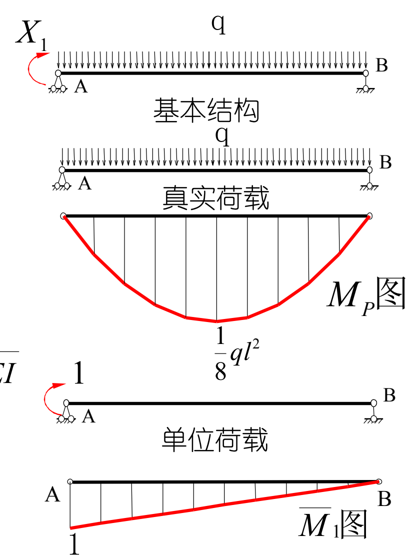
$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

（3）求解系数项和自由项

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_1}{EI}=\frac{1}{EI}\times\frac{1}{3}\times1\times1\times l=\frac{l}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=\sum\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}$$

$$=\frac{1}{EI}\times\left(\frac{2}{3}\times l\times\frac{ql^2}{8}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{ql^3}{24EI}$$

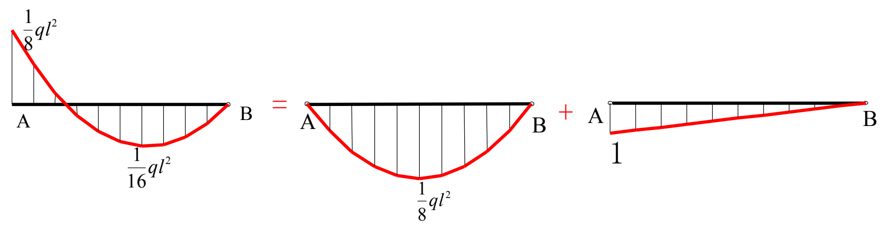


（4）解方程，求多余未知力

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=\frac{l}{3EI}X_1+\frac{ql^3}{24EI}=0 \Longrightarrow X_1=-\frac{ql^2}{8}$$

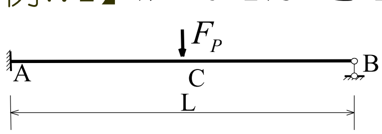
（5）根据叠加原理，绘制内力图。

$$M=\overline{M}_1X_1+M_P$$



M图　　M_P图　　$\overline{M}_1$图

【例7.2】作图示结构的弯矩图。EI为常数



解:（1）选择基本结构

（2）建立力法典型方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

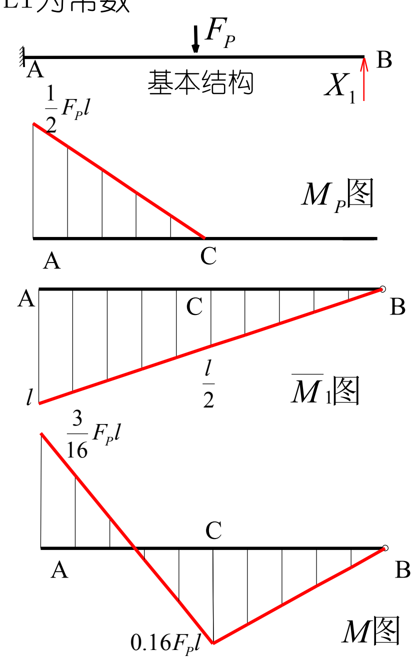
（3）求解系数项和自由项

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\times\frac{1}{3}\times l\times l\times l=\frac{l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{3}\times l\times\frac{F_Pl}{2}\times\frac{l}{2}$$

$$-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{6}\times\frac{l}{2}\times\frac{F_Pl}{2}\times\frac{l}{2}=-\frac{5F_Pl^2}{48EI}$$

（4）解方程，并绘制内力图。

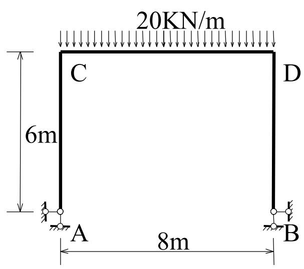


§7-3 超静定刚架和排架

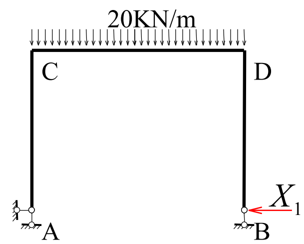
一. 超静定刚架

计算刚架和排架时，通常忽略轴力和剪力的影响，而只考虑弯矩的影响。轴力的影响在高层刚架的柱中比较大，剪力的影响当杆件短而粗时比较大，当遇到这种情况时要作特殊处理。

【例7.3】图示超静定刚架受均布荷载q= 20KN/m作用，试作刚架的内力图。



解: (1) 选择基本结构



(2) 建立力法典型方程

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

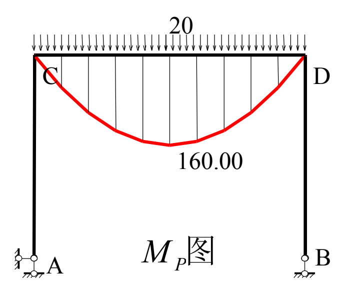
(3) 求解系数项和自由项

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\times\left(\frac{1}{3}\times6\times6\times6\right)\times2$$

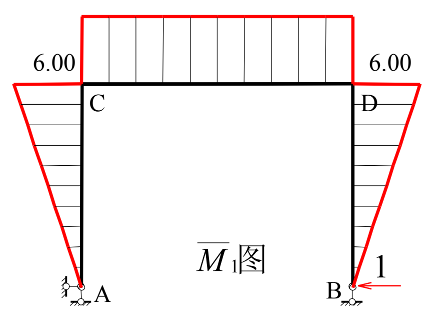
$$+\frac{1}{EI}\times6\times6\times8 = \frac{432}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI}\times\left(\frac{2}{3}\times6\times160\right)\times6$$

$$= -\frac{5120}{EI}$$



M_P图



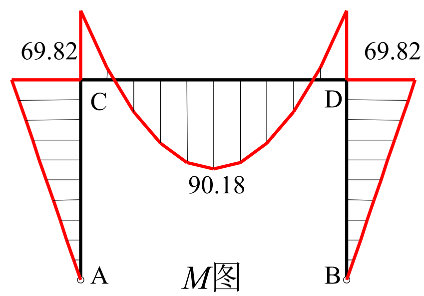
$\overline{M}_1$图

（4）解方程，求多余未知力

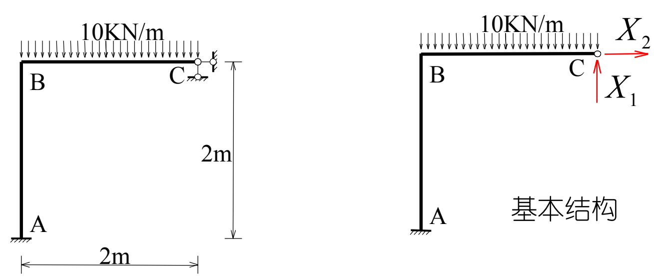
$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=\frac{432}{EI}X_1-\frac{5120}{EI}=0 \Longrightarrow X_1=11.85$$

（5）根据叠加原理，绘制内力图。

$$M=\overline{M}_1X_1+M_P$$



【例7.4】 作图示超静定刚架的内力图。

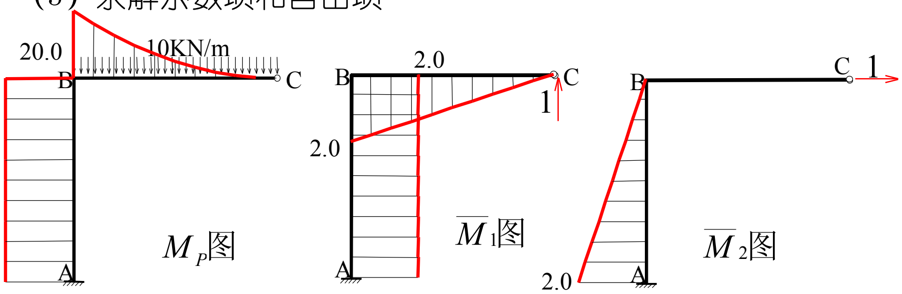


解：（1）选择基本结构

（2）建立力法典型方程

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\end{cases}$$

（3）求解系数项和自由项



$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\times\frac{1}{3}\times2\times2\times2+\frac{1}{EI}\times2\times2\times2=\frac{32}{3EI}$$

$$\delta_{22}=0+\frac{1}{EI}\times\frac{1}{3}\times2\times2\times2=\frac{8}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=0-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=-\frac{4}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{4}\times2\times20\times2-\frac{1}{EI}\times2\times20\times2=-\frac{100}{EI}$$

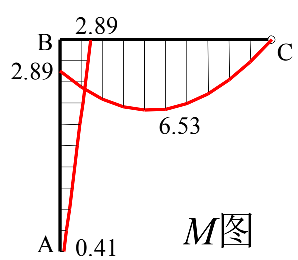
$$\Delta_{2P}=0+\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\times2\times20\times2=\frac{40}{EI}$$

（4）解方程，求多余未知力

$$\begin{cases}\dfrac{32}{3EI}X_1-\dfrac{4}{EI}X_2-\dfrac{100}{EI}=0\\ -\dfrac{4}{EI}X_1+\dfrac{8}{3EI}X_2+\dfrac{40}{EI}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=8.57\\ X_2=2.14\end{cases}$$

（5）根据叠加原理，绘制内力图。

$$M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+M_P$$



M图

二. 超静定排架

【例7.5】 图示为两跨厂房排架，试作内力图。

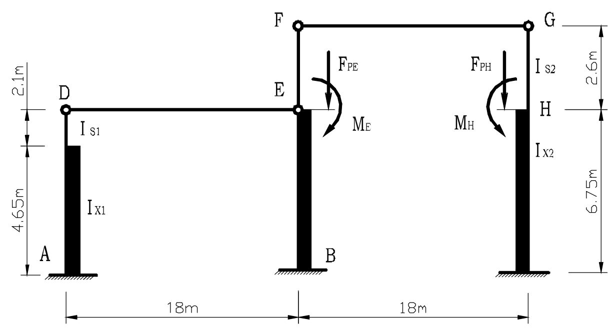
计算资料如下：

（1）截面惯性矩　左柱：上段 $I_{S1}=10.1\times10^4\ cm^4$ ，下段 $I_{X1}=28.6\times10^4\ cm^4$

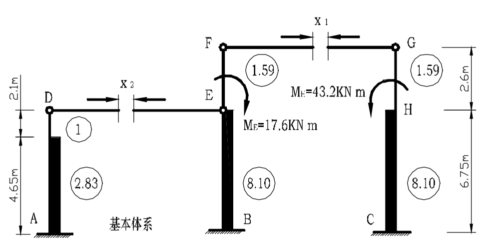
右柱及中柱：上段 $I_{S2}=16.1\times10^4 cm^4$ ，下段 $I_{X2}=81.8\times10^4 cm^4$

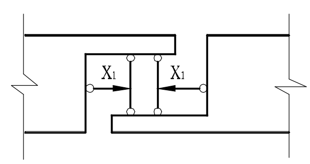
(2)右跨吊车荷载　竖向荷载为 $F_{PH}=108$ KN，$F_{PE}=43.9$ KN。由于 F_{PH}、F_{PE} 与下柱轴线有偏心距 $e=0.4m$ ，因此在H、E点的力偶荷载为

$$M_H = F_{PH}e = 43.2KN\cdot m \qquad M_E = F_{PE}e = 17.6KN\cdot m$$



解: (1) 此排架是二次超静定。取连杆 FG 和 DE 的轴力 X_1 和 X_2 为多余未知力。



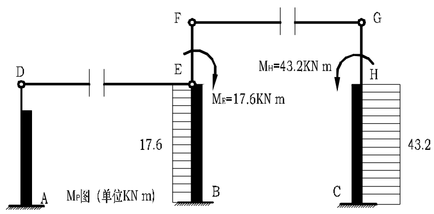


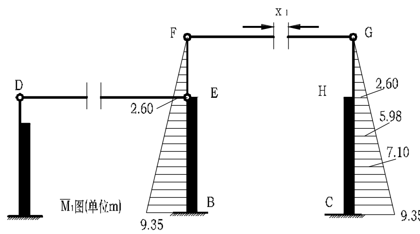
多余未知力 X1 和 X2 都是内力；内力在基本体系中是广义力，是由数值相等、方向相反的一对力组成的。

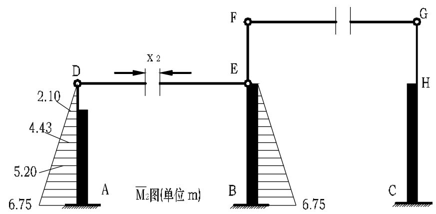
切断一根杆件，是指在切口处把与轴力、剪力、弯矩相应的三个约束全部切断。这里指的是切断杆件中的轴向约束，即只切断与轴力相应的那一个约束，另外两个约束仍然保留。

(2)建立力法典型方程
$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\end{cases}$$

(3)求解系数项和自由项







$$\Delta_{1P} = \sum\int \frac{\overline{M}_1 M_P}{EI} ds = 303$$

$$\Delta_{2P} = \sum\int \frac{\overline{M}_2 M_P}{EI} ds = -49.5$$

$$\delta_{11} = \sum\int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} ds = 73.4$$

$$\delta_{22} = \sum\int \frac{\overline{M}_2^2}{EI} ds = 50.9$$

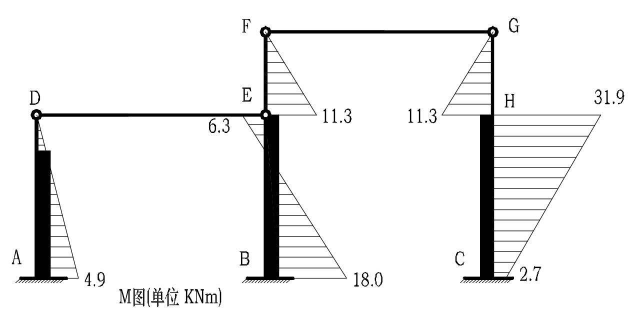
$$\delta_{12} = \delta_{21} = -20$$

（4）解方程，求多余未知力

$$\begin{cases} 73.4X_1 - 20X_2 + 303 = 0 \\ -20X_1 + 50.9X_2 - 49.5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -4.33KN \\ X_2 = -0.73KN \end{cases}$$

（5）根据叠加原理，绘制内力图。

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + M_P$$



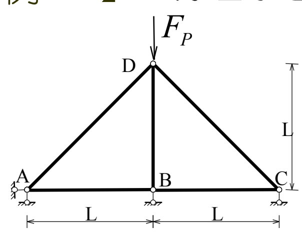
§7-4 超静定桁架和组合结构

一．超静定桁架

超静定桁架的计算与超静定刚架的计算相同，其特点仅在于：基本结构的位移是由杆件轴向变形引起的。即计算力法方程的系数和自由项时，只考虑轴力的影响。

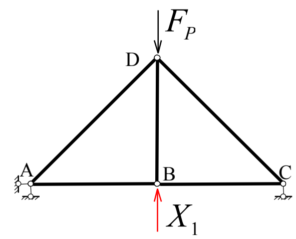
$$\delta_{ij}=\sum\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j l}{EA}\qquad \Delta_{iP}=\sum\frac{\overline{N}_i N_P l}{EA}$$

【例7.6】 试求图示超静定桁架的内力（外部超静定桁架）



解：

（1）选择基本结构



（2）建立力法典型方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

（3）求解系数项和自由项

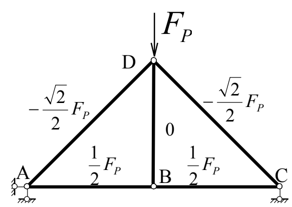
$$\delta_{ij}=\sum\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j l}{EA}=\frac{1}{EA}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}l\right)\times 2$$

$$+\frac{1}{EA}\times\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times l\right]\times 2+\frac{1}{EA}\times(-1)\times(-1)\times l$$

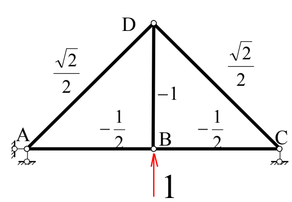
$$=2.914\frac{l}{EA}$$

$$\Delta_{iP}=\sum\frac{\overline{N}_i N_P l}{EA}=\frac{1}{EA}\times\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}F_P\right)\times\sqrt{2}l\right]\times 2$$

$$+\frac{1}{EA}\times\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}F_P\times l\right]\times 2+0=-1.914\frac{F_P l}{EA}$$



F_{NP}图



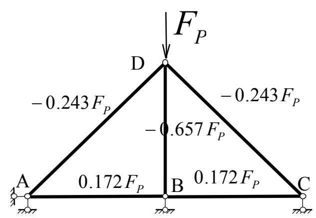
F_{N1}图

（4）解方程，求多余未知力

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=2.914\frac{l}{EA}X_1-1.914\frac{F_P l}{EA}=0 \Rightarrow X_1=0.657F_P$$

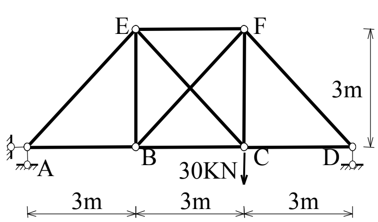
（5）根据叠加原理，绘制内力图。

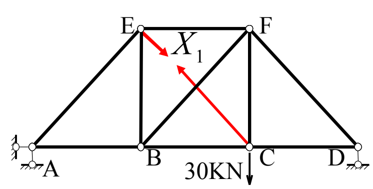
$$F_N=\overline{F}_{N1}X_1+F_{NP}$$



F_N图

【例7.7】 试求图示超静定桁架的内力（内部超静定桁架）





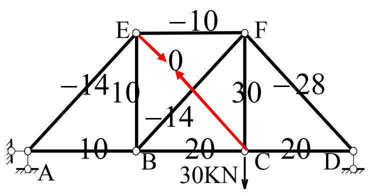
基本结构

解： （1）选择基本结构

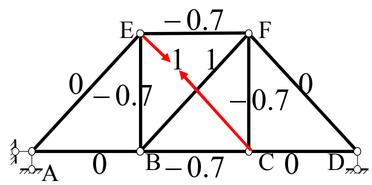
（2）建立力法典型方程 $\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$

注意：在表达式 $\delta_{ij}=\sum\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j l}{EA}$ $\Delta_{iP}=\sum\frac{\overline{N}_i N_P l}{EA}$ 中，也包括被截杆件，不要漏算。这是因为位移是由所有各杆变形引起的，包括被截杆的变形。

（3）求解系数项和自由项，及解方程，并进行叠加



F_{NP}图



$\overline{F}_{N1}$图

$$\delta_{11}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}\overline{F}_{N1}l}{EA}\qquad \Delta_{1P}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}F_{NP}l}{EA}$$

δ 11、△1P和轴力FN的计算

杆件	l(cm)	A(cm^2)	F_{NP}(KN)	$\overline{F}_{N1}$	$\frac{\overline{F}_{N1}^2 l}{A}/cm^{-1}$	$\frac{\overline{F}_{N1}F_{NP}l}{A}/KN\cdot cm^{-1}$	$F_N=\overline{F}_{N1}X_1+F_{NP}/KN$
1	300	15	10	0	0	0	10.0
2	300	20	20	-0.7	7.5	-210	11.5
3	300	15	20	0	0	0	-20.0
4	424	20	-14	0	0	0	-14.0
5	300	25	-10	-0.7	6	84	-18.5
6	424	20	-28	0	0	0	-28.0
7	300	15	10	-0.7	10	-140	1.5
8	300	15	30	-0.7	10	-420	21.5
9	424	15	-14	1	28	-396	-1.9
10	424	15	0	1	28	0	12.1
Σ					89.5	-1082	

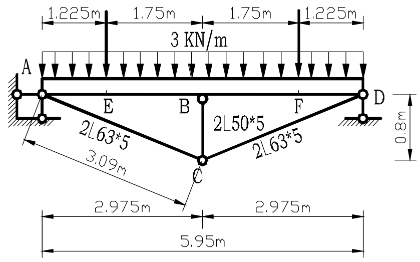
二. 超静定组合结构

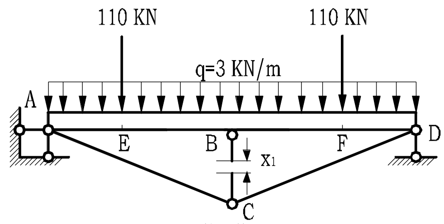
对于组合结构，计算力法方程的系数和自由项时，对桁式杆只考虑轴力的影响；对梁式杆通常可以忽略轴力和剪力的影响，只考虑弯矩的影响。即计算力法方程的系数和自由项时，采用下述表达式

$$\delta_{ij}=\sum_{梁式杆}\int\frac{\overline{M}_i\overline{M}_j}{EI}ds+\sum_{桁式杆}\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j l}{EA}$$

$$\Delta_{iP}=\sum_{梁式杆}\int\frac{\overline{M}_i M_P}{EI}ds+\sum_{桁式杆}\frac{\overline{N}_i N_P l}{EA}$$

【例7.8】试求图示一次超静定组合结构在荷载作用下的内力。各杆的刚度给定如下：杆AD为梁式杆，EI = 1.40×10^4 KN·m^2, EA = 1.99×10^6 KN 杆 AC 和 CD 为链杆，EA = 2.56×10^5 KN；杆BC为链杆，EA=2.02×10^5 KN





基本体系

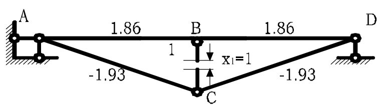
解：（1）选择基本结构

一次超静定结构，切断多余链杆 BC ，在切口处代以未知轴力X1，得基本体系。基本体系由于荷载和未知力在 X1 方向的位移应当为零，亦即切口处两截面的相对位移应为零。

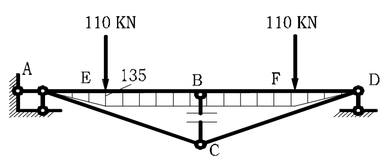
（2）建立力法典型方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

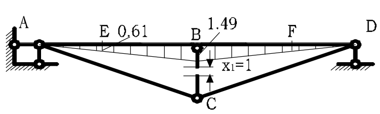
（3）求解系数项和自由项



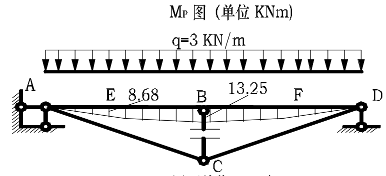
$\overline{F}_{N1}$图（单位 KN）



M_P 图（单位 KNm）



$\overline{M}_1$图（单位 KNm）



M_P图（单位 KNm）

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}ds+\sum\frac{\overline{F}_{N1}^2 l}{EA}=$$

$$\left\{\frac{1}{1.4\times10^4}\left[\frac{1.49\times2.975}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times1.49\right)\right]\times2+\frac{1}{1.99\times10^6}\left(1.86^2\times5.95\right)+\frac{1}{2.56\times10^5}\left(1.93^2\times3.09\right)\times2+\frac{1}{2.02\times10^5}\left(1^2\times0.80\right)\right\}$$

$$=0.000419\ m/KN$$

$$\Delta_{1P}=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}ds$$

$$=\frac{1}{1.4\times10^4}\left[\left(\frac{2}{3}\times13.25\times2.975\right)\times\left(\frac{5}{8}\times1.49\right)\times2+\left(\frac{1}{2}\times135\times1.225\right)\times\left(\frac{2}{3}\times0.61\right)\times2+\left(135\times1.75\right)\times\left(\frac{0.61+1.49}{2}\right)\times2\right]$$

$$=0.0438\ m$$

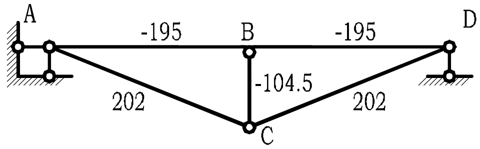
（4）解方程，求多余未知力

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{0.0438\,m}{0.000419\,m/KN} = -104.5KN$$

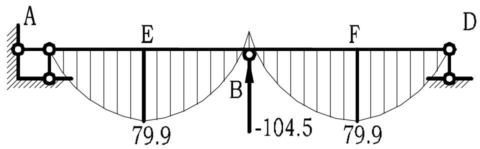
（5）根据叠加原理，绘制内力图。

$$F_N = \overline{F}_{N1}X_1 + F_{NP}$$

$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_P$$



FN图（单位 KN）

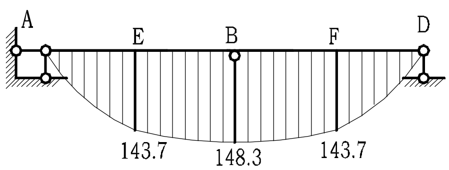


M图（单位 KNm）

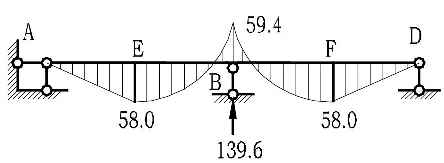
讨论

由上图可以看出，横梁 AD 在中点 B 受到下部桁架的支承反力为104.5KN，这时横梁最大弯矩为79.9 KN·m，如果没有下部桁架的支承，则横梁 AD 为一简支梁，其弯矩图如右，其最大弯矩为148.3 KN·m。可见，由于桁架的支承，横梁的最大弯矩减小了46%。

这个超静定结构的内力分布与横和桁架的相对刚度有关。如果下部链杆的横截面很小，则横梁的 M 图接近于简支梁的 M 图。如果下部链杆的截面很大，则横梁的 M 图接近于两跨连续梁的 M 图。



M图（单位 KNm）



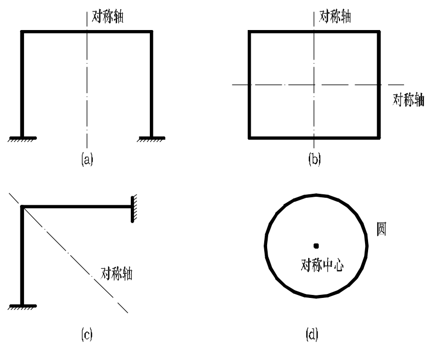
M图（单位 KNm）

§ 7-5 对称结构的计算

一． 对称结构

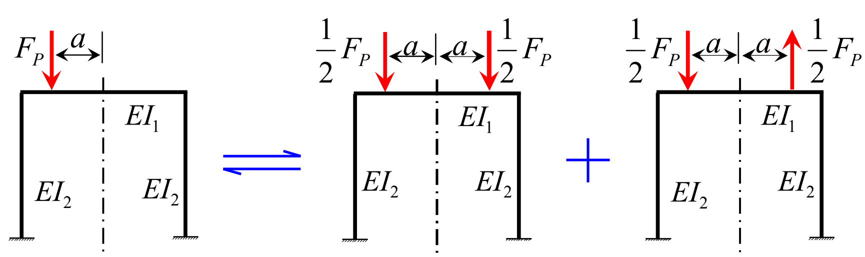
（1）结构的几何形式和支承情况对某轴对称；

（2）杆件截面和材料性质也对此轴对称（因而杆件的截面刚度EI对比轴对称）。



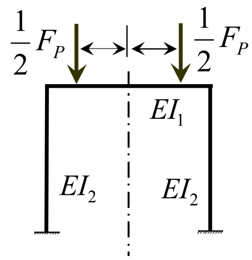
二． 对称荷载与反对称荷载

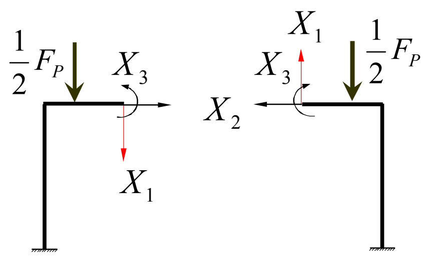
作用在对称结构上的任何荷载都可分解为两组 → 对称荷载、反对称荷载



对称荷载　　反对称荷载

【例7.9】作图示结构的弯矩图。各杆长均为L





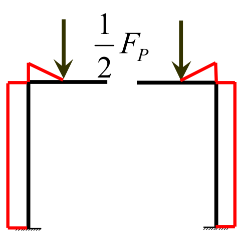
基本结构

解：（1）选择基本结构

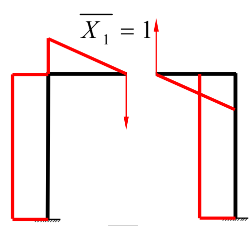
（2）建立力法典型方程

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1P}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}=0$$
$$\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0$$

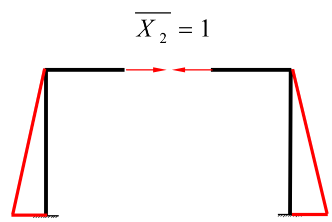
（3）求解系数项和自由项，并解方程



M_P图



$\overline{M}_1$图



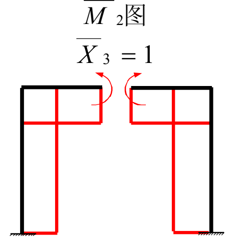
$\overline{M}_2$图

$\delta_{11}\neq 0$　$\delta_{12}=\delta_{21}=0$　$\Delta_{1P}=0$

$\delta_{22}\neq 0$　$\delta_{13}=\delta_{31}=0$　$\Delta_{2P}\neq 0$

$\delta_{33}\neq 0$　$\delta_{23}=\delta_{32}\neq 0$　$\Delta_{3P}\neq 0$

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+0+0+0=0\\ 0+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}=0\\ 0+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{cases}\Rightarrow X_1=0$$

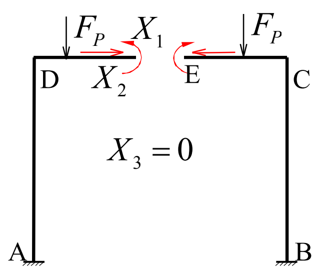


$\overline{M}_3$图

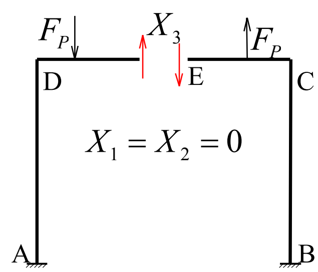
结论：对称结构受对称荷载，反对称内力（剪力）为零

三. 对称结构的内力特性

- 对称结构在对称荷载作用下，反对称未知力（剪力）必等于零，只需计算对称未知力(轴力、弯矩、支座反力)。
- 对称结构在反对称荷载作用下，对称未知力(轴力、弯矩、支座反力)必等于零，只需计算反对称未知力（剪力）。



对称荷载作用



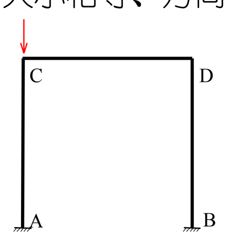
反对称荷载作用

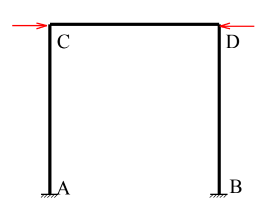
四. 对称结构的变形及内力图特性

- 对称结构在对称荷载作用下，轴力图、弯矩图、变形是对称的，剪力图是反对称的。
- 对称结构在反对称荷载作用下，轴力图、弯矩图、变形是反对称的，剪力图是对称的。

五. 无弯矩情况的判定

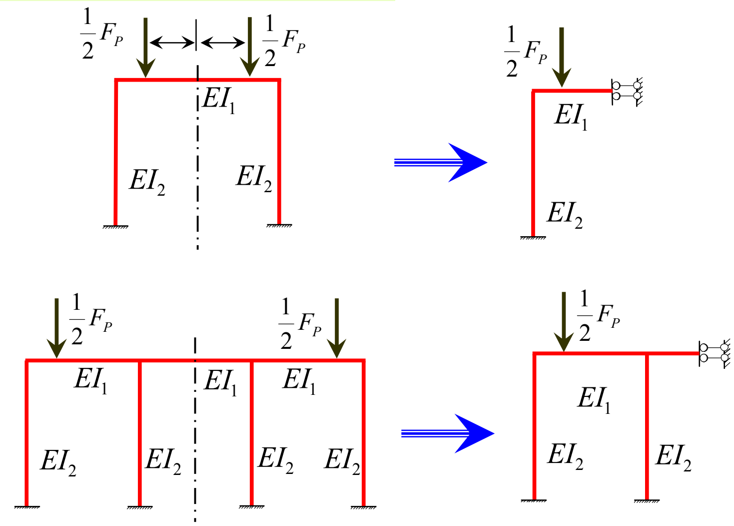
- 一个集中力沿柱子的轴线作用。
- 一对大小相等、方向相反的力沿杆轴作用于杆的两端。



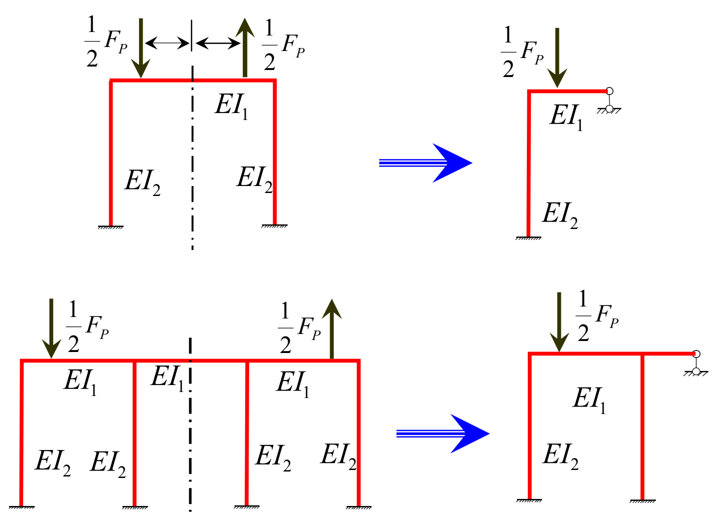


六. 半边结构的选取

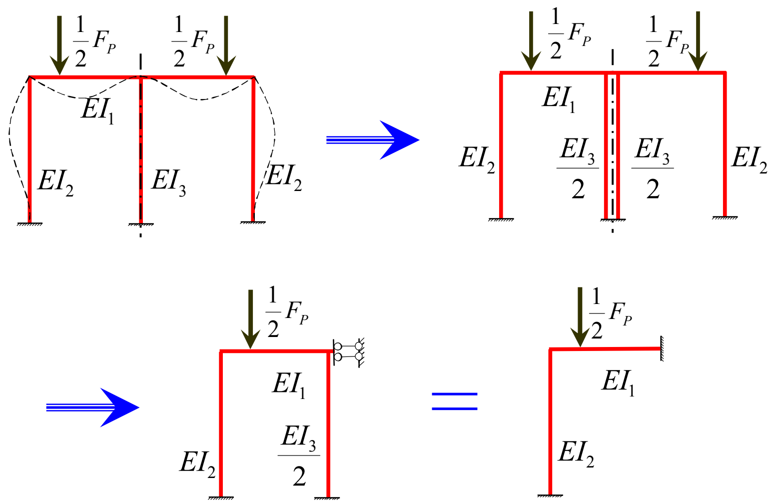
➢奇数跨刚架受对称荷载作用



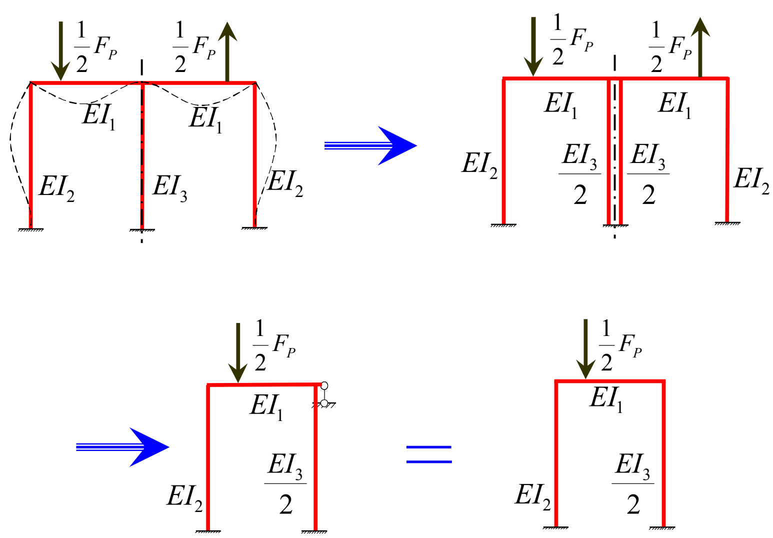
➢奇数跨刚架受反对称荷载作用



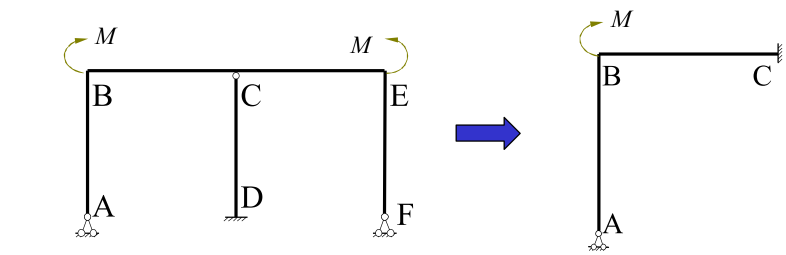
➢偶数跨刚架受对称荷载作用

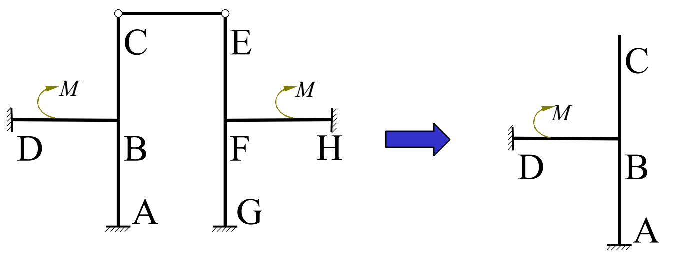


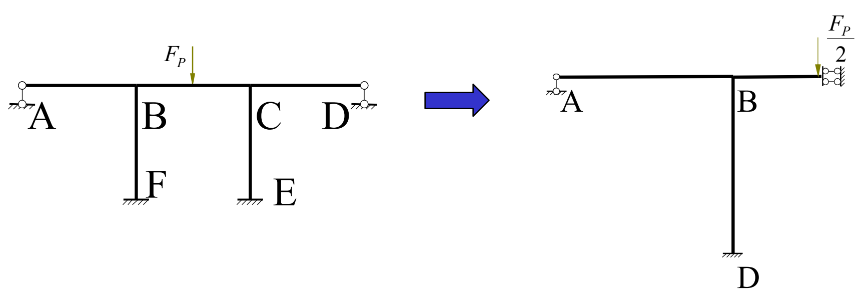
➢偶数跨刚架受反对称荷载作用

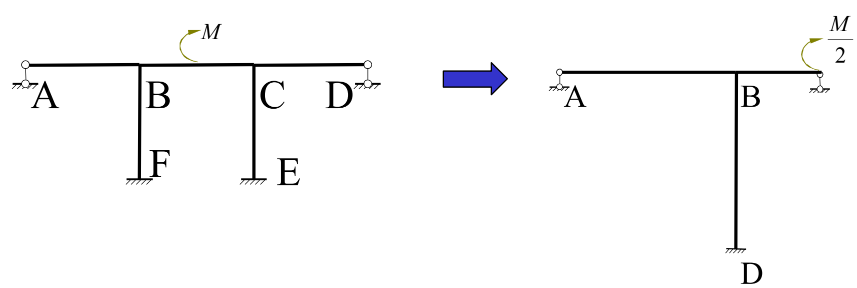


分析下列结构的等代半结构

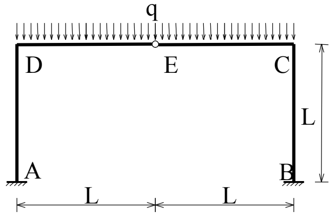


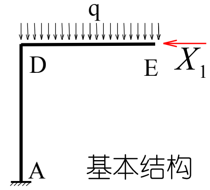






【例7.10】作图示结构的弯矩图。EI为常数

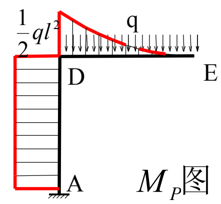




解：（1）选择基本结构

（2）建立力法典型方程

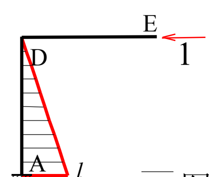
$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$



（3）求解系数项和自由项

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\times\frac{1}{3}\times l\times l\times l+0=\frac{l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{1}{EI}\times\left(-\frac{1}{2}\times l\times\frac{ql^2}{2}\times l\right)+0=-\frac{ql^4}{4EI}$$

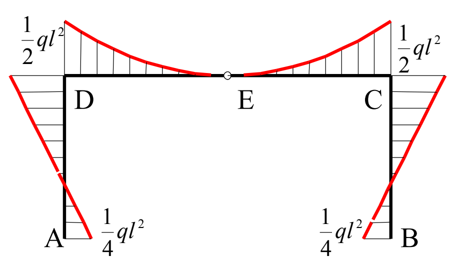


（4）解方程，求多余未知力

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=\frac{l^3}{3EI}X_1-\frac{ql^4}{4EI}=0 \quad \Rightarrow \quad X_1=\frac{3ql}{4}$$

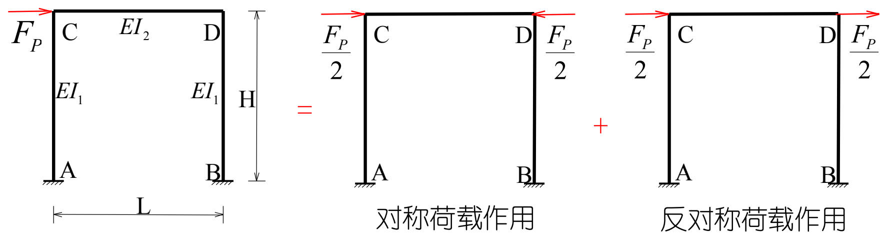
（5）根据叠加原理，绘制内力图。

$$M=\overline{M}_1X_1+M_P$$



M图

【例7.11】作图示结构的弯矩图。

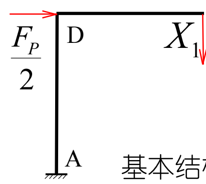


对称荷载作用　　反对称荷载作用

解：（1）选择基本结构

（2）建立力法典型方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$



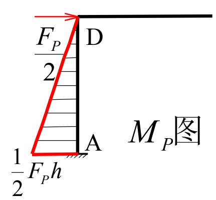
基本结构

（3）求解系数项和自由项

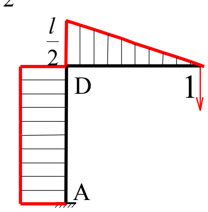
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI_1}\left(\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\times h\right)+\frac{1}{EI_2}\left(\frac{1}{3}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{l^2h}{4EI_1}+\frac{l^3}{24EI_2}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{1}{EI_1}\times\frac{1}{2}\times\frac{F_Ph}{2}\times\frac{l}{2}\times h+0=\frac{F_Ph^2l}{8EI_1}$$



M_P图



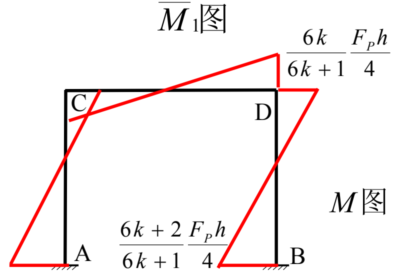
$\overline{M}_1$图

（4）解方程，求多余未知力

设 $k=\frac{I_2h}{I_1l}$ 则 $X_1=-\frac{6k}{6k+1}\cdot\frac{F_Ph}{2l}$

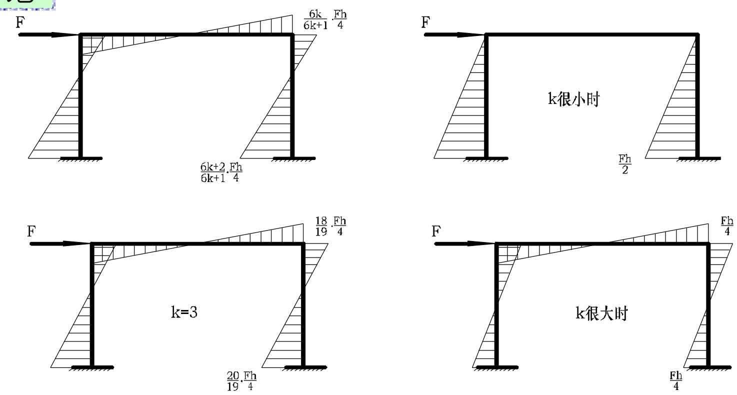
（5）根据叠加原理，绘制内力图。

$$M=\overline{M}_1X_1+M_P$$



M图

讨论



弯矩图随横梁与立柱刚度比值而改变。

（1）当横梁比立柱的 I 小很多时，即 k 很小时，柱顶弯矩趋于零。

（2）当横梁比立柱的 I 大很多时，即 k 很大时，柱的弯矩零点趋于柱的中点。

（3）一般情况下，柱的弯矩零点在柱的上半部范围内变动。刚架受水平结点荷载的近似计算中，当 k⩾3 时，常将弯矩零点置于柱中点，以简化计算。

§7-9 支座位移和温度改变时的计算

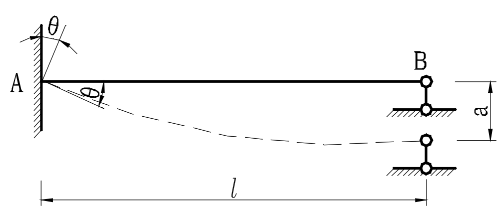
超静定结构的特点之一是无荷载作用时，也可以产生内力。超静定结构在支座移动和温度改变等因素作用下产生的内力，称为自内力。

一. 支座位移时的计算

用力法分析支座移动时的超静定结构，其基本原理与在荷载作用下的情况基本一致，系数项仍按图乘法计算，而自由项是由于支座移动改变引起的，其计算公式为

$$\Delta = -\sum \overline{F}_{RK} c_K$$

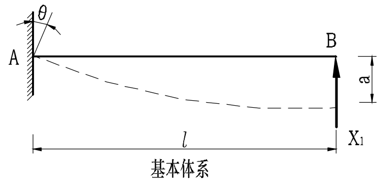
【例7.12】图示等截面梁AB。已知左端支座转动角度为 θ，右端支座下沉位移为 α，试作弯矩图。 EI为常数



解法一：

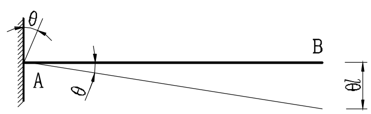
（1）选择基本结构

（2）建立力法典型方程



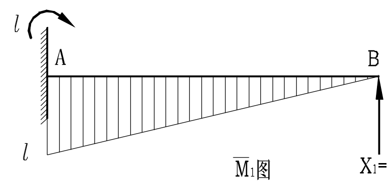
位移协调条件：$\Delta_1 = -a$

基本体系的位移$\triangle_1$是由未知力 X_1 和支座 A 的转角θ共同作用产生的，因此



$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1c} = -a$$

自由项$\triangle_{1c}$是当支座 A 产生转角θ时在基本结构中产生的沿 X_1 方向的位移，则



$$\Delta_{1c} = -\sum \overline{F}_{RK} c_K = -\theta l$$

系数$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI} ds = \frac{l^3}{3EI}$

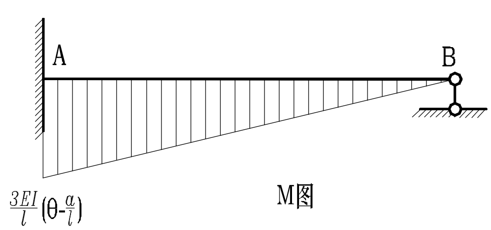
（3）解方程，求多余未知力

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1c} = \frac{l^3}{3EI}X_1 - \theta l = -a \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{3EI}{l^2}\left(\theta - \frac{a}{l}\right)$$

（5）根据叠加原理，绘制内力图。

因为基本结构是静定结构，支座移动时在基本体系中不引起内力，因此内力全是由多余未知力引起的。弯矩叠加公式为

$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_P = \overline{M}_1 X_1$$



解法二：

（1）选择基本结构

（2）建立力法典型方程

位移协调条件：$\Delta_1 = \theta$

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1c} = \theta$$

自由项Δ_{1c}是简支梁由于支座 B 下沉位移a而在 A 点产生的转角

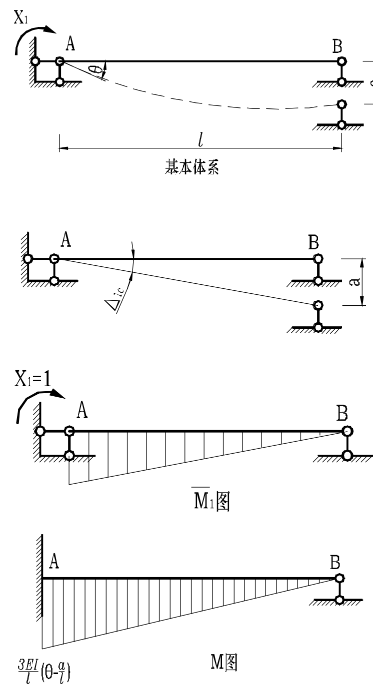
$$\Delta_{1C} = -\left(-\frac{1}{l}\times a\right) = \frac{a}{l}$$

系数 $\delta_{11} = \dfrac{l}{3EI}$

（3）解方程，绘制内力图。

$$\frac{l}{3EI}X_1 + \frac{a}{l} = \theta$$

$$X_1 = \frac{3EI}{l}\left(\theta - \frac{a}{l}\right)$$



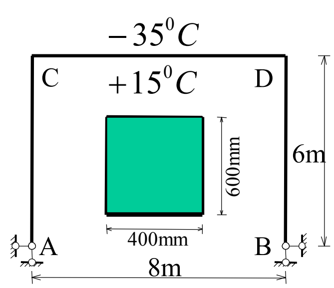
二．温度改变时的计算

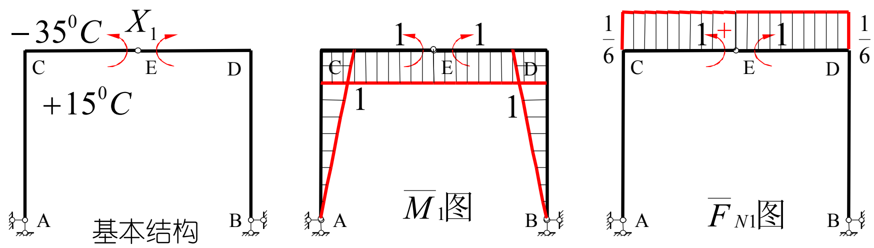
用力法分析温度改变时的超静定结构，其基本原理与在荷载作用下的情况基本一致，系数项仍按图乘法计算，而自由项是由于温度改变引起的，其计算公式为

$$\Delta = \sum\int \overline{F}_N \alpha t_0 ds + \sum\int \overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}ds$$

【例7.13】

图示刚架，施工时的温度为15 ^0C，冬季使用时室外温度为-35 ^0C，室内温度为15 ^0C，试作内力图。EI为常数，$\alpha = 0.00001$





解：(1) 选择基本结构

(2) 建立力法典型方程 $\delta_{11}X_1+\Delta_{1t}=0$

(3) 求解系数项和自由项

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{3}\times1\times1\times6\right)\times2+1\times1\times8\right]=\frac{12}{EI}$$

施工时的温度和冬季温度的变化值为

室外$t_1=-50^0C$　　室内$t_1=0^0C$

则　$t_0=\dfrac{-50+0}{2}=-25$　　$\Delta t=0-(-50)=50$

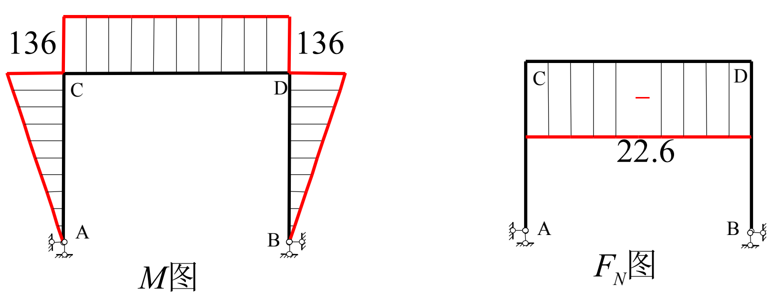
故$\Delta_{1t}=\alpha\times(-25)\times\left(\dfrac{1}{6}\times8\right)+\alpha\times\dfrac{50}{0.6}\times\left[1\times8+\left(\dfrac{1}{2}\times1\times6\right)\times2\right]=1133\alpha$

(4) 解方程，求多余未知力

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1t}=\frac{12}{EI}X_1+1133\alpha=0 \Longrightarrow X_1=-94.2\alpha EI=-135.65$$

(5) 根据叠加原理，绘制内力图。

$$M=\overline{M}_1X_1+M_P \quad F_N=\overline{F}_NX_1+F_{NP}$$



§7-10 超静定结构的位移计算

平面结构位移计算的一般公式为

$$\Delta=\sum\int(\overline{M}\kappa+\overline{F}_N\varepsilon+\overline{F}_Q\gamma_0)ds-\sum\overline{F}_{RK}c_K$$

一. 荷载作用时的位移计算

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}ds+\sum\int\frac{\overline{F}_NF_N}{EA}ds+\sum\int\frac{k\overline{F}_QF_Q}{GA}ds \quad (7-12)$$

二. 支座位移时的位移计算

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}ds+\sum\int\frac{\overline{F}_NF_N}{EA}ds+\sum\int\frac{k\overline{F}_QF_Q}{GA}ds-\sum\overline{F}_{RK}c_K \quad (7-13)$$

三. 温度变化时的位移计算

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}ds+\sum\int\frac{\overline{F}_NF_N}{EA}ds+\sum\int\frac{k\overline{F}_QF_Q}{GA}ds$$
$$+\sum\int\overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}ds+\sum\int\overline{F}_N\alpha t_0ds \quad (7-14)$$

四. 综合因素作用下的位移计算

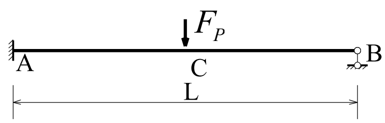
$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}ds+\sum\int\frac{\overline{F}_NF_N}{EA}ds+\sum\int\frac{k\overline{F}_QF_Q}{GA}ds$$
$$+\sum\int\overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}ds+\sum\int\overline{F}_N\alpha t_0ds-\sum\overline{F}_{RK}c_K \quad (7-15)$$

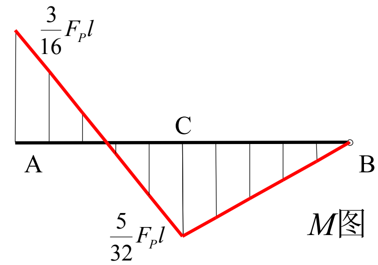
说明

M、F_N、F_Q 为超静定结构在综合因素作用下的内力；

$\overline{M}$、$\overline{F}_N$、$\overline{F}_Q$和$\overline{F}_{RK}$为基本结构在单位力作用下的内力和支座反力。

【例7.14】求图示结构C点的竖向位移。EI为常数，只考虑弯矩的影响。

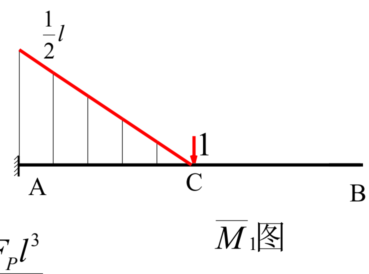




解:

（1）绘制出超静定结构的M图

（2）任意选择一基本结构，并绘制出单位力作用下得M图



（3）位移计算

$$\Delta_C=\frac{1}{EI}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{16}F_Pl\times\frac{1}{2}l\times\frac{1}{2}l$$

$$-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{32}F_Pl\times\frac{1}{2}l\times\frac{1}{2}l=\frac{5}{768}\frac{F_Pl^3}{EI}$$