文章编号：1006-6780(2001)01-0114-05

体外预应力混凝土简支梁的极限强度分析

王宗林，王 彤，张树仁

哈尔滨工业大学 交通科学与工程学院，黑龙江 哈尔滨 150090）

摘 要：在分析体外预应力钢筋与混凝土主梁变形的基础上，通过截面内力平衡方程和变形协调关系，对体外预应力混凝土梁进行了从加载到破坏的全过程分析，得到了极限状态下体外筋的极限应力和混凝土梁的极限抗弯强度。利用本文介绍的计算方法，可以考虑不同的荷载形式 包括对称荷载和不对称荷载），不同的截面形式及不同的普通钢筋用量等因素对主梁极限状态的影响，并能得到中间过程及破坏阶段混凝土、普通钢筋、预应力钢筋的应变和应力。通过本文理论得到的计算结果得到了试验的验证。

关键词：体外预应力；混凝土梁；截面平衡；极限分析；极限应力增量；

中图分类号：TU378 文献标识码：A

Ultimate strength analysis for external prestressed concrete beams

WANG Zong-lin, Wang Tong, ZHANG Shu-ren

(School of Communication Science & Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China)

Abstract: Presents the ultimate strength of the concrete beam obtained through analysis for the whole deformation process of external prestressed concrete beam from loading to failure of external prestressed concrete beam by means of section force equation and coordination of deformation and ultimate stress of tendon with such facts as type of load seaction and quantity of reinforements taken into calculation, and the effect of strain and stress of concrete, reinforcement, tendon into consideration.

Key words: external prestressing; concrete beam; section equilibrium; complete process analysis; ultimate analysis; ultimate stress incretion

0 概述

体外预应力混凝土梁桥是将预应力钢筋布置在梁体之外的一种结构形式，通过梁体上固定的转向装置，把预应力钢筋与主梁相接，并改变预应力钢筋的形状。与传统的有粘结预应力混凝土梁相比，它简化了预应力筋曲线，减小了摩阻损失；减小了混凝土构件截面尺寸，减轻结构自重；可以更换预应力筋，并便于在使用期内检测和维护；施工工艺简便，由于预应力筋与混凝土截面分离，提高了混凝土的质量和耐久性。因此在既有桥梁的加固和采用节段施工方法的桥梁中，体外预应力结构得到了极广泛的应用。

由于除在锚固和转向区内，预应力筋与梁并无接触，因此在受到外荷载作用时，体外预应力钢筋的应变与混凝土主梁的应变在相同截面上不协调，体外预应力钢筋的应力发展将不同于体内束，通常在极限状态下不会达到屈服，从而导致其抗弯能力的削弱。

在极限状态下，体外预应力钢筋的应变不能由平截面假定来决定，理论上属于破坏阶段的内力超静定问题。对于体外预应力筋在极限状态下的极限应力问题，国内外学者作了大量的试验研究和分析，但大多是通过试验结果建立经验公式或半理论的经验公式来进行计算，没有从结构本身的力学性能出发去研究预应力钢筋的极限应力问题，得到的结论往往具有一定的局限性[1,2]。

收稿日期：2000-09-08

作者简介：王宗林(1969-)，男，哈尔滨工业大学博士生.

本文在分析体外预应力钢筋与混凝土主梁变形的基础上，通过截面的内力平衡方程和变形协调关系，对体外预应力混凝土梁进行了从开始加载到破坏的全过程分析，并得到了极限状态下体外筋的极限应力和混凝土梁的极限抗弯强度。计算结果与试验结果吻合良好。

1 基本理论

1.1 基本假定

在分析体外预应力混凝土梁的工作性能时，引入如下假设：

1. 主梁的变形符合平截面假定，截面内非预应力筋的变形与混凝土变形相协调。

2. 不考虑体外筋的摩阻损失，并设体外筋的应力沿其长度方向为常量。

3. 混凝土、普通钢筋及体外筋的应力–应变曲线已知。

4. 考虑受拉区混凝土参加工作。但当某一纤维层的受拉混凝土拉应变达到0.00015时，该纤维层的混凝土退出工作。

5. 下列情况如出现其一即认为结构达到了极限状态：混凝土受压区顶层纤维达到极限压应变ε_u（0.0033），体外预应力筋应力达到设计强度R_y[3]。

必须指出的是，受拉区钢筋应力达到屈服强度R_g并不能说明结构已破坏。因为普通钢筋具有较高的延伸率，当它进入塑性阶段发生流变时，只会引起预应力钢筋应力的迅速增长，而不会导致结构的破坏。

1.2 截面应力、应变关系[4]

如图1所示任意截面，在外力作用下，截面的最终变形可用截面混凝土受压区高度c和截面变形曲率φ（以截面下缘受拉为正）表示。则截面沿梁高任一点y处混凝土的实际应变为（以压应变为正）

$$\varepsilon(y)=\varphi\ (y+c-h) \tag{1}$$

截面内受拉区、受压区非预应力钢筋的应变（以拉应变为正）可分别写出如下

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Ag}&=\varphi\ (h-a_g-c)\\ \varepsilon_{Ag'}&=\varphi\ (a'_g-c)\end{aligned} \tag{2}$$

如果已知混凝土和钢筋的应力–应变曲线，则根据混凝土应变ε和钢筋应变ε_{Ag}、$\varepsilon_{Ag'}$即可求出其应力$\sigma_y=\sigma(\varepsilon_y)$、$\sigma_{Ag}=\sigma_{Ag}(\varepsilon_{Ag})$、$\sigma_{Ag'}=\sigma_{Ag'}(\varepsilon_{Ag'})$。

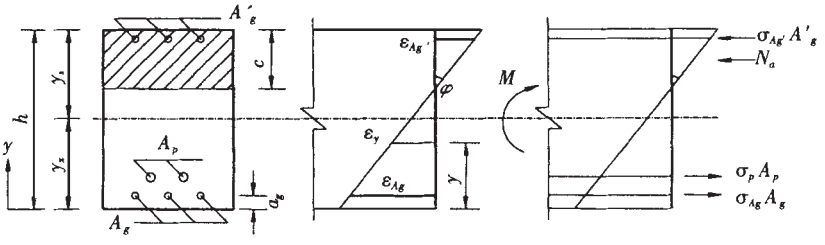


图1　截面应力、应变关系

Fig.1　Stress and strain in section

1.3 截面平衡方程的建立

对于体外预应力混凝土简支梁桥，截面受到外荷载弯矩M的作用，由此引起的混凝土应力、预应力钢筋应力和普通钢筋应力之间，存在着如下的内力平衡关系

1. 水平力平衡

$$N_l+\sigma_p A_p+\sigma_{Ag}A_g-Na-\sigma_{Ag'}A'_g=0 \tag{3}$$

2. 弯矩平衡（对截面形心轴0–0）

$$M-M_l-\sigma_{Ag'}A_{g'}(y_s-a'_g)-M_a-\sigma_p A_p y_p-\sigma_{Ag}A_g(y_x-a_g)=0 \tag{4}$$

式（3）、（4）中：N_a为受压区混凝土的合力，$N_a=\int_c \sigma_c(y)b(y)\mathrm{d}y$；$Nl$为受拉区混凝土的合力，

$N_l=\int_{h-c}\sigma_c(y)b(y)\mathrm{d}y$; M_a为受压区混凝土对形心的弯矩，$M_a=\int_{c}\sigma_c(y)b(y)(y-y_x)\mathrm{d}y$; M_l为受拉区混凝土对形心的弯矩，$M_l=\int_{h-c}\sigma_c(y)b(y)(y_x-y)\mathrm{d}y$; σ_p为预应力钢筋的总应力；A_p为预应力钢筋的面积；y_p为预应力钢筋合力点到截面形心的距离；$b(y)$为高度y处的截面宽度。

当外力矩M和预应力钢筋的应力σ_p确定后，联立式(3)、(4)便可求得任意截面的混凝土受压区高度c和截面变形曲率φ。

1.4 体外预应力钢筋的应力σ_p

预应力钢筋仅在锚固和转向部位与主梁变形一致，在截面上并不满足变形协调关系，因此预应力钢筋的应力σ_p就不能直接由截面变形参数c和φ求出。预应力钢筋的变形不仅与锚固和转向处主梁的变形有关，还与体外筋的形状、转向点数目等因素有关，图2列出了常用的体外预应力钢筋的几种布置形式。

以梁固定端A点为坐标原点，利用主梁在锚固和转向位置处的变形，可以求得结构在受力后预应力钢筋新的坐标位置，由此可求出预应力钢筋的变形和应力。以下分别推导预应力钢筋的变形和应力计算公式。

设主梁A、B点的转角为θ_A、θ_B，主梁B、C、D点的轴向变形分别为u_B、u_C、u_D($u_A=0$)，C、D点的竖向变形分别为w_C、w_D。则预应力钢筋的伸长量Δl_p和应变ε_p为

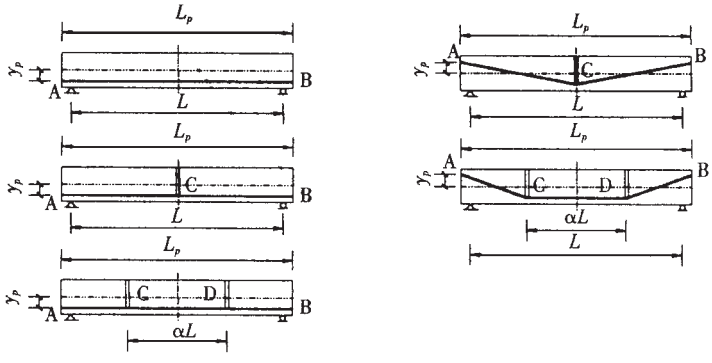


图2 转向装置的几种形式

Fig.2 Types of divertion

1. 直线筋无转向装置

$$\Delta l_p=2\theta_B\cdot y_p+u_B$$
$$\varepsilon_p=\Delta l_p/L_p \tag{5}$$

2. 直线筋单转向装置

$$\Delta l_p=\sqrt{w_C^2+\left(\frac{L}{2}+u_C-\theta_A\cdot y_p^A\right)^2}+\sqrt{w_C^2+\left(\frac{L}{2}+u_B+\theta_B\cdot y_p^B-u_C\right)^2}-L$$
$$\varepsilon_p=\Delta l_p/L_p \tag{6}$$

3. 直线筋双转向装置

$$\Delta l_p=\sqrt{w_C^2+\left(\frac{1-\alpha}{2}L+u_C+\theta_C\cdot y_p^C-\theta_A\cdot y_p^A\right)^2}+(\alpha L+u_D-u_C-2\theta_C\cdot y_p^C)+$$
$$\sqrt{w_C^2+\left(\frac{1-\alpha}{2}L+u_B+\theta_B\cdot y_p^B-u_D-\theta_D\cdot y_p^D\right)^2}-L$$
$$\varepsilon_p=\Delta l_p/L_p \tag{7}$$

4. 斜线筋单转向装置

$$\Delta l_p=\sqrt{(w_C+e)^2+\left(\frac{L}{2}+u_C-\theta_A\cdot y_p^A\right)^2}+\sqrt{(w_C^2+e)^2+\left(\frac{L}{2}+u_B-u_C-\theta_A\cdot y_p^A\right)^2}-L/\cos\theta$$
$$\varepsilon_p=\Delta l_p/L_p,\quad e=y_p^A-y_p^C \tag{8}$$

5. 斜线筋双转向装置

$$\Delta l_p=\sqrt{(w_C+e)^2+\left(\frac{1-\alpha}{2}L+u_C-\theta_C\cdot y_p^C-\theta_A\cdot y_p^A\right)^2}+(\alpha L+u_D-u_C-2\theta_C\cdot y_p^C)+$$
$$\sqrt{(w_C+e)^2+\left(\frac{1-\alpha}{2}L+u_B+\theta_B\cdot y_p^B-u_D-\theta_D\cdot y_p^D\right)^2}-[\alpha L+(1-\alpha)L/\cos\theta]$$

$$\varepsilon_p=\Delta l_p/L_p,\quad e=y_p^A-y_p^C \tag{9}$$

求得预应力钢筋的应变ε_p之后，若已知预应力钢筋的应力-应变关系，即可求出预应力钢筋的应力

$$\sigma_p=f(\varepsilon_p)$$

1.5 主梁变形计算

图3所示简支梁，在采用截面平衡方程（5）、（4）求得了所有截面上混凝土受压区高度c和截面变形曲率φ后，可求得在锚固点A、B和转向点C、D处的主梁轴向变形u_A、u_B、u_C、u_D，转角θ_A、θ_B、θ_C、θ_D及C、D点的竖向变形w_C、w_D。在对称荷载作用下，有

$$u_A=0,\theta_A=-\theta_B,\theta_C=-\theta_D,w_C=w_D$$

由截面变形参数c和φ可求得截面形心轴处混凝土的应变

$$\bar{\varepsilon}(x)=\varphi(y_s-c) \tag{10}$$

由此得到各点的轴向变形为

$$\begin{aligned}u_C&=\int_{AC}\bar{\varepsilon}(x)\mathrm{d}x\\ u_D&=\int_{AD}\bar{\varepsilon}(x)\mathrm{d}x\\ u_B&=\int_{AB}\bar{\varepsilon}(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{11}$$

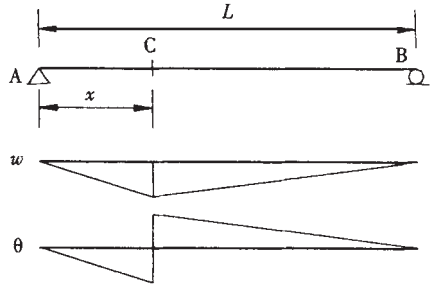


图3　位移计算模式

Fig.3　Calculating module of displacement

各点的转角为

$$\begin{aligned}\theta_A&=\int_L(\frac{x}{L}-1)\varphi(x)\mathrm{d}x\\ \theta_C&=\int_{AC}\frac{x}{L}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{CB}(\frac{x}{L}-1)\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{12}$$

C、D点的竖向变形为

$$w_C=\int_{AC}\frac{1+\alpha}{2}x\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{CB}\frac{1-\alpha}{2}(L-x)\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{13}$$

由于截面的变形参数c和φ沿梁长是变化的，无法用解析式表示，因此，在进行积分求各点变形时，需将梁沿长度方向划分成许多小块，然后采用分段求和方法计算。

2 全过程分析

当体外预应力混凝土梁受到外力作用时，主梁将发生变形，引起锚固点和转向点处预应力钢筋位置的变化，从而使其产生应力增量。该应力增量是未知的，与混凝土主梁各截面的变形有关，需增加由式（1）~（4）所示的纵向变形协调条件才能求解。

实际计算时，将主梁沿梁长划分为许多的小块（设为n块），并假定在每一小块内截面变形参数c和φ是不变的，这样，由式（1）~（3）可组成一个$2n+1$阶的方程组，该方程组具有如下的未知数

$$(c_1,\varphi_1),(c_2,\varphi_2),\cdots,(c_n,\varphi_n),\sigma_p$$

这是一个非线性的方程组，由于问题的复杂性，很难找到该类方程组的求解方法。为此，采用如下方法来近似求解：

1. 假设一个体外预应力钢筋的应力增量$\Delta\sigma_p$，则预应力筋总应力为$\sigma_p=\sigma_{p0}+\Delta\sigma_p$。

2. 在σ_p已确定的情况下，联立式（1）、（4），求解n个截面的变形参数c和φ。由于此时采用混凝土和钢筋的真实的应力-应变曲线，所以方程也是非线性的。

3. 由式（10）~（13）可求得锚固点和转向点主梁的变形，将此变形代入式（5）~（9），可以求出预应力钢筋的应变及应力σ_p'。

4. 比较σ_p和σ_p'，若不满足精度要求，则应修改σ_p的值，重复1~3步，直至满足精度要求为止。

采用以上的分析方法，可以对体外预应力混凝土简支梁桥从开始加载到最后破坏的整个过程进行分析，并能得到中间过程及破坏阶段混凝土、普通钢筋、预应力钢筋的应变和应力。

尚应指出的是，对不设转向装置或不在跨中设转向装置的情况，当梁受力挠曲时，因为体外预应力筋的变形保持直线，必然引起预应力筋有效偏心距的损失（即二次影响），该损失使得极限状态时体外筋的应力增量减小。当主梁挠度较大时，必须计入该项的影响才能得到较为准确的体外预应力筋应力增量。

3 理论计算与试验结果的比较

为验证上述方法的正确性，采用一批体外预应力梁的试验结果与计算值进行比较。该试验由新加坡的Kiang-Hwee Tan、Chee-Khoon Ng等所作[5]。实验采用三分点加载的方式，梁的跨度、截面形式及其它情况可参见相关文献。表1为试验结果与计算结果的比较。

对T-0号梁，采用全过程分析方法得到的荷载-应力增量曲线、荷载-挠度曲线如图4、图5所示。

表1 试验结果与计算的比较

Table 1 Comparison between test and calculated results

梁 号	试验值	理论值	试验值/理论值
T-0	1720	1724	0.997
T-1	1770	1782	0.993
T-1B	1170	1181	0.991
T-2	1770	1792	0.988

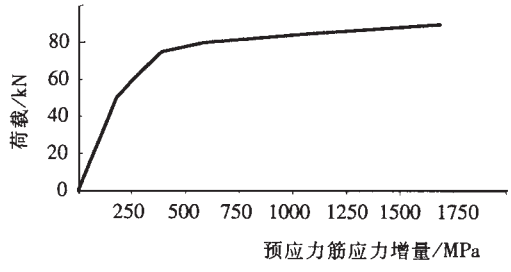


图4 荷载-应力增量曲线

Fig.4 Curve of load-stress increment

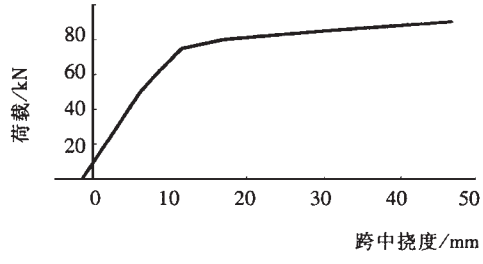


图5 荷载-挠度曲线

Fig.5 Curve of load-deflection

4 结论

1. 本文所建立的计算方法从截面内部平衡方程出发，较全面地考虑了混凝土、受压钢筋、受拉钢筋对预应力筋应力及截面强度的影响，推导出的非线性方程组符合截面变形规律，计算值与试验值吻合良好，达到了较高的精度。

2. 可以对体外预应力混凝土简支梁桥进行从加载到破坏的全过程非线性分析，并能得到中间过程及破坏阶段混凝土、普通钢筋、预应力钢筋的应变和应力，以及梁的极限变形和极限强度。

3. 利用本文方法，可以方便地考虑不同的荷载形式（包括对称荷载和不对称荷载），不同的截面形式及不同的普通钢筋用量等因素对主梁极限状态的影响，同时还可以对体内有粘结预应力筋及体外筋混合配筋的简支梁进行分析。

4. 建议进一步研究混凝土梁极限强度、预应力筋极限应力的影响因素，通过合理的简化，从理论上找出能用于工程设计的实用计算方法。

参 考 文 献：

[1] 杜拱辰. 现代预应力混凝土结构[M]. 北京：中国建筑出版社，1988.

[2] 肖长礼. 后张无粘结部分预应力混凝土公路桥[M]. 北京：人民交通出版社，1999.

[3] 房贞政. 无粘结与部分预应力结构[M]. 北京：人民交通出版社，1999.

[4] 王宗林，黄侨. 大跨径预应力混凝土桥梁的时效分析理论及其在实际工程中的应用[J]. 中国公路学报，1999，(12): 40-47.

[5] Kiang-Hwee Tan, Chee-Khoon Ng. Effects of deviators and tendon configuration on behavior of externally prestressed beams[J]. ACI Structure Journal, 1997，（）：1-9.